

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

|                            |   |
|----------------------------|---|
|                            | <b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>  |
| <b>по дисциплине:</b>      | Введение в алгебраическую топологию   |
| <b>по направлению:</b>     | Прикладная математика и информатика   |
| <b>профиль подготовки:</b> | Математика<br>Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики<br>кафедра дискретной математики |
| <b>курс:</b>               | 3   |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр  |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: Г.Г. Гусев, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Задачей курса является изучение основ алгебраической и геометрической топологии. Курс разделен на два семестра; собственно алгебраической топологии посвящен второй семестр, в то время как в первом семестре происходит изучение общих вопросов топологии точечных множеств, необходимых для понимания основной программы

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основ алгебраической топологии.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области алгебраической топологии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области алгебраической топологии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области алгебраической топологии.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции  | Индикаторы достижения компетенции   |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач   | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи   |
|   | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи   |
|   | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки  |
|   | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки  |
|   | УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи   |
| УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений | УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач |
|   | УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений               |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности         | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения  |
|   | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки   |
|   | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов   |
| ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач                               | ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности   |
|   | ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности  |
|   | ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности   |

|   |  |
|---|--|
|   | ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации         |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели                  |
|   | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
|   | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты             |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию   | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации  |
|   | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива                             |
|   | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях                         |

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической топологии;  
современные проблемы соответствующих разделов алгебраической топологии;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической топологии.

уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической топологии;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической топологии;  
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| №                     | Тема (раздел) дисциплины           | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. |          |                 |                |
|-----------------------|------------------------------------|---|----------|-----------------|----------------|
|                       |                                    | Лекции  | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1                     | Гомологии и когомологии.           | 3   | 3        |                 |                |
| 2                     | Гомотопические группы.             | 4   | 4        |                 |                |
| 3                     | Исчисление струй.                  | 2   | 2        |                 |                |
| 4                     | Косы и конфигурации.               | 4   | 4        |                 |                |
| 5                     | Основы дифференциальной топологии. | 2   | 2        |                 | 15             |
| Итого часов           |                                    | 15  | 15       |                 | 15             |
| Подготовка к экзамену |                                    | 0 час.  |          |                 |                |
| Общая трудоёмкость    |                                    | 45 час., 1 зач.ед.  |          |                 |                |

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Гомологии и когомологии.

Определение цепного комплекса. Его гомологии.

2. Гомотопические группы.

Накрытия и клеточные комплексы.

3. Исчисление струй.

Трансверсальность и приложения в теории особенностей.

4. Косы и конфигурации.

Примеры векторных расслоений.

5. Основы дифференциальной топологии.

Теория Морса и приложения гомологий.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Алгебраическая топология [Текст] / А. Хатчер гпер. с англ. В. В. Прасолова ; под ред. Т. Е. Панова - М.МЦНМО,2011

2. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебник для вузов / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Физматлит, 2004 .— 304 с.

#### Дополнительная литература

1. Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский ; Летняя школа "Современная математика", Дубна, июль 2008 г. — М. : МЦНМО, 2011 .— 28 с.
2. Топология для физиков [Текст] : уч. пособие для вузов / Ю. А. Бычков ; Гос. ком. РФ по высш. образов., Моск. физико-техн. ин-т .— М. : Изд-во МФТИ, 1993 .— 108 с.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Математика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Г.Г. Гусев, канд. физ.-мат. наук, доцент

# 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции  | Индикаторы достижения компетенции   |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач   | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи   |
|   | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи   |
|   | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки  |
|   | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки  |
|   | УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи   |
| УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений   | УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач |
|   | УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений               |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности   | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения  |
|   | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки   |
|   | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов   |
| ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач   | ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности   |
|   | ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности  |
|   | ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности   |
|   | ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации                    |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели                             |
|   | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности            |
|   | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты                        |
| ПК-2 Способен осуществлять поиск и анализ научной информации, применять методы научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации   | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации   |

ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию

ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в алгебраическую топологию» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы, теории алгебраической топологии;  
современные проблемы соответствующих разделов алгебраической топологии;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач алгебраической топологии.

### уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач алгебраической топологии;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

### владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов алгебраической топологии;  
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Форма контроля: дифференцированный зачет, выставяющийся по результатам сдачи листочков с задачами в течение семестра.

Примеры задач.

1. Пусть  $X, Y$  -- топологические пространства. Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется открытым, если образ  $fG$  любого открытого подмножества  $G \subseteq X$  открыт в  $Y$ . Покажите, что всякое открытое отображение  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  имеет конечное число точек минимума и максимума, принимает в точках минимума значение 0, а в точках максимума -- значение 1, а в промежутках между двумя последовательными точками

экстремума монотонно.

2. Функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется аддитивной, если

\$\$

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y.$$

\$\$

Как известно из курса анализа, всякая непрерывная аддитивная функция  $f$  является линейной функцией  $f(x) = cx$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Покажите, что если аддитивная функция  $f$  разрывна, то ее

график

\$\$

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = y\}$$

\$\$

является всюду плотным в  $\mathbb{R}^2$  множеством.

3. Покажите, что пространство  $X$  хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ

\$\$

$$\Delta = \{(x, x), x \in X\} \subset X \times X$$

\$\$

является замкнутым подмножеством  $X \times X$  (в топологии Тихонова).

4. Применяя Большую лемму Урысона, докажите следующую теорему:

**Теорема 1.** Пусть  $X$  -- нормальное пространство и  $\Phi$  -- его замкнутое подмножество.

Всякая ограниченная непрерывная функция

\$\$

$$\varphi: \Phi \rightarrow \mathbb{R}$$

\$\$

может быть продолжена на все пространство  $X$ , т.е. существует непрерывная функция

\$\$

$$f: X \rightarrow \mathbb{R},$$

\$\$

совпадающая с  $\varphi$  во всех точках множества  $\Phi$ . Если  $m$  есть точная верхняя грань функции  $|\varphi|$  на  $\Phi$ , то функцию  $f$  можно подобрать так, чтобы верхняя грань  $|f|$  также была равна  $m$ .

Покажите также, что Теорема 1 характеризует нормальные пространства среди всех  $T_1$ -пространств.

5. Пусть множество  $X$  есть декартово произведение двух копий единичного отрезка  $[0, 1]$ . Введем на  $X$  порядковую топологию, задав на  $X$  лексикографическое упорядочение:

\$\$

$$(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow a < c; \text{ или } a = c, b < d.$$

\$\$

Покажите, что полученное топологическое пространство является связным бикомпактом. Проверьте, что оно удовлетворяет первой аксиоме счетности. Является ли это пространство метризуемым?

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Раздел 1. Введение в теорию гомотопий.

Гомотопические группы, точная гомотопическая последовательность пары и тройки. Расслоения, гомотопическая последовательность расслоения. CW-комплексы. Теорема о клеточной аппроксимации и вычисление гомотопических групп.

Раздел 2. Основы теории гомологий.

Гомологии цепного комплекса. Симплициальные гомологии полиэдра. Сингулярные гомологии. Клеточное вычисление гомологий. Простейшие методы вычисления гомологий (вырезание, точные последовательности пары, тройки, Майера – Виеториса).

Раздел 3. Гомологии дифференцируемых многообразий.

Применения гомологий. Гомологический смысл ориентируемости многообразия, степени отображения, индекса векторного поля. Комплекс Морса и его гомологии. Неравенства Морса.

Раздел 4. Когомологии и их приложения.

Когомологии, умножение в когомологиях; двойственность Пуанкаре. Форма пересечений на гомологиях многообразий. Комплекс де Рама и изоморфизм де Рама (без доказательства). Категория, род Шварца и их оценка в терминах кольца когомологий. Классифицирующие пространства дискретных групп.

Раздел 5. Индекс зацепления и теоремы типа Лефшеца.

Индекс зацепления подмногообразий в многомерной сфере. Двойственность Александера. Теоремы о неподвижных точках.

Раздел 6. Введение в спектральные последовательности.

Спектральная последовательность фильтрованного пространства. Точные последовательности пар и троек как спектральные последовательности. Гомологии расслоенных пространств с односвязной базой. Гомологии с коэффициентами в локальной системе. Двойственность Пуанкаре на неориентируемом многообразии. Гомологии расслоенного пространства в общей ситуации. Трансгрессия. Умножение в спектральной последовательности расслоения.

Раздел 7. Приложения спектральных последовательностей.

Спектральная последовательность Серра. Гомологии классических групп Ли. Комплекс Морса на пространстве путей и вариационное исчисление.

Раздел 8. Формула включений-исключений для взрослых.

Порядковый комплекс. Спектральная последовательность Майера-Виеториса. Гомологии наборов плоскостей и групп крашенных кос. Гомологии пространств функций и полиномов без многократных корней и пространств петель. Гомологии конфигурационных пространств.

Темы для курсовых работ:

Пространства струй и ростков. Струйное расширение дифференцируемого отображения. Топологии Уитни в пространствах дифференцируемых функций. Трансверсальность. Слабая теорема трансверсальности и теорема трансверсальности Тома. Мультиструйная теорема трансверсальности Тома. Стратифицированные множества и теоремы трансверсальности к ним. Приложения к классификации особенностей отображений.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.